المعادلات ذات الدرجة العليا

دليل المعلم وإجابات نموذجية

الفصل 3 | الوحدة 14 | صفحات الكتاب 145-152 | زمن مقترح: 50 دقيقة | الدرجة: 20

أهداف التعلم

- يشرح الطالب «الدرجة وعدد الجذور» ويطبقه مع الشروط والتبرير.
- يشرح الطالب «تكوين معادلة تكعيبية» ويطبقه مع الشروط والتبرير.
- يشرح الطالب «الجذر المكرر» ويطبقه مع الشروط والتبرير.

ملخص سريع

الدرجة وعدد الجذور	لكثيرة الحدود من الدرجة n عدد n من الجذور المركبة مع عد التكرار.
تكوين معادلة تكعيبية	تكعيبية جذورها r,s,t تتناسب مع (x-r)(x-s)(x-t).
الجذر المكرر	الجذر المكرر يحقق P(r)=0 و P'(r)=0.

مثال محلول

لحل x^3-4x^2+x+6=0 نتحقق أن P(2)=0، ثم نقسم على x-2 فنحصل على (x-2)(x-3)(x+1)=0؛ إذن الجذور 2 و3 و-1.

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

التدريب المتدرج

أجب من دون الرجوع إلى الحل. أظهر خطواتك في أسئلة الاستجابة القصيرة.

1. كم جذرا لكثيرة حدود من الدرجة الرابعة في مجموعة الأعداد المركبة مع عد التكرار؟ [1 درجات]

أ	2	ب	3
ج	4	د	لا يمكن التحديد

الإجابة: 4

تنص النظرية الأساسية للجبر على أن كثيرة الحدود من الدرجة n لها n جذور مركبة مع عد التكرار.

2. إذا كان 2 جذرا للمعادلة x^3+kx^2-4x-4=0، فما قيمة k؟ [1 درجات]

أ	-1	ب	0
ج	1	د	2

الإجابة: 1

نعوض x=2: 8+4k-8-4=0، ومنه 4k-4=0 فيكون k=1.

3. أي معادلة تكعيبية أحادية جذورها 1- و2 و3؟ [1 درجات]

أ	x^3-4x^2+x+6=0	ب	x^3+4x^2-x-6=0
ج	x^3-6x^2+x+4=0	د	x^3-4x^2-x-6=0

الإجابة: x^3-4x^2+x+6=0

المعادلة (x-3)(x-2)(x+1)=0، وبالتوسيع نحصل على x^3-4x^2+x+6=0.

4. إذا كان ω جذرا تكعيبيا غير حقيقي للواحد، فما قيمة ω^2026؟ [1 درجات]

أ	1	ب	ω
ج	ω^2	د	-1

الإجابة: ω

لأن ω^3=1 تتكرر القوى كل 3، و2026 باقي قسمته على 3 يساوي 1؛ إذن ω^2026=ω.

5. في المعادلة (x+1)^2(x-2)=0، أي جذر مكرر؟ [1 درجات]

أ	1- بتكرار 2	ب	1 بتكرار 2
ج	2 بتكرار 2	د	2 بتكرار 3

الإجابة: 2 بتكرار 2

العامل (x-2) مرفوع للقوة الثانية، لذلك الجذر 2 مكرر مرتين.

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

6. ما مجموعة حل $x^4-5x^2+4=0$ في الأعداد الحقيقية؟ [1 درجات]

ب {1، -1}
أ {2، -2}
د {2، 1}
ج {2، 1، -1، -2}

الإجابة: {2، 1، -1، -2}

بوضع $y=x^2$ نحصل على $y^2-5y+4=(y-1)(y-4)$، ومنه $x^2=1$ أو $x^2=4$.

7. صواب أم خطأ: كل معادلة كثيرة حدود من الدرجة n لها n جذور حقيقية مختلفة1] . درجات]

□ صواب □ خطأ

الإجابة: خطأ

العد n يكون في الأعداد المركبة ومع احتساب التكرار؛ وقد تكون بعض الجذور غير حقيقية أو مكررة.

8. صواب أم خطأ: إذا كان r جذرا مكررا لـ$P(x)$، فإنه يحقق $P(r)=0$ و1] .$P'(r)=0$ درجات]

□ صواب □ خطأ

الإجابة: صواب

العامل $(x-r)^2$ يقسم $P(x)$، ولذلك يشترك P ومشتقته في الجذر r.

9. حل $x^3-4x^2+x+6=0$ باستعمال جذر صحيح معلوم ثم خفض الدرجة3] . درجات]

الإجابة: x=-1 أو x=2 أو x=3

نجد $P(2)=0$؛ وبالقسمة على x-2 يكون الخارج $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$، فتكون الجذور 2 و3 و-1.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

10. كون المعادلة التكعيبية الأحادية التي جذورها 1 و-2 و3] .4 درجات]

الإجابة: $x^3-3x^2-6x+8=0$

نكتب $(x-4)(x+2)(x-1)=0$. بالتوسيع نحصل على $x^3-3x^2-6x+8=0$.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

11. إذا كان $\omega^3=1$ و$\omega^2+\omega+1=0$، فبسط 3] .$(1+\omega)^6$ درجات]

الإجابة: 1

من $1+\omega=-\omega^2$، إذن $(1+\omega)^6=(-\omega^2)^6=\omega^{12}=(\omega^3)^4=1$.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

12. إذا كان 1 جذرا مكررا لـ$P(x)=x^3+ax^2+bx+2$، فأوجد a وb ثم حلل $P(x)$. [3 درجات]

الإجابة: $a=0$، $b=-3$، و$P(x)=(x-1)^2(x+2)$
من $P(1)=0$: $a+b=-3$، ومن $P'(1)=0$: $2a+b=-3$ بالطرح $a=0$ ثم $b=-3$، والتحليل $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

التحدي والمراجعة

1. اشتق علاقات فييتا للمعادلة الأحادية ذات الجذور r وs وt بتوسيع .(x-r)(x-s)(x-t)

لذا مجموع الجذور هو سالب معامل x^2، ومجموع الجداءات الثنائية معامل x، والجداء الثلاثي سالب الحد الثابت.
بالتوسيع نحصل على .x^3-(r+s+t)x^2+(rs+rt+st)x-rst

2. حل x^6-5x^3+4=0 في الأعداد المركبة، واكتب جميع الجذور الستة باستعمال ω.

.(y-1)(y-4)=0 من x^3=1 الجذور 1 وω وω^2. وإذا كان a=□4، فجذور x^3=4 هي a وaω وaω^2. هذه هي الجذور الستة.
بوضع y=x^3 نحصل على

3. اكتشف الخطأ: إذا كان r جذرا، كتب طالب العامل .x+r فسر التصحيح وبين حالة يكون فيها x+r هو العامل الصحيح.

إذا كان r جذرا فإن P(r)=0، ولذلك العامل .x-r يصبح x+r العامل الصحيح عندما يكون الجذر r-، لأن .x+r=x-(-r)

خطة المتابعة

عد الجذور مع التكرار، خفض الدرجة، والجذور التكعيبية للواحد، ثم أعد الأسئلة 6-2 و12.-9 إذا كانت 14 أو أكثر: انتقل إلى تحدي الوحدة الإلكتروني.
إذا كانت الدرجة أقل من 14/20: راجع

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام