علاقات التكرار والاستقراء الرياضي

دليل المعلم وإجابات نموذجية

الفصل 2 | الوحدة 10 | صفحات الكتاب 91-105 | زمن مقترح: 50 دقيقة | الدرجة: 20

أهداف التعلم

- يشرح الطالب «حساب علاقة تكرارية» ويطبقه مع الشروط والتبرير.
- يشرح الطالب «تحويل علاقة خطية» ويطبقه مع الشروط والتبرير.
- يشرح الطالب «خطوة الانتقال» ويطبقه مع الشروط والتبرير.

ملخص سريع

حساب علاقة تكرارية	تحدد العلاقة الحدود اللاحقة من السابقة مع بيانات ابتدائية كافية.
تحويل علاقة خطية	يمكن إزاحة a_(n+1)=p a_n+c حول نقطة ثابتة لتصبح هندسية.
خطوة الانتقال	تثبت خطوة الانتقال أن صحة P(k) تستلزم صحة P(k+1).

مثال محلول

إذا كان u1=3 و u_(n+1)=u_n+4، فأوجد u12. الحل الموجه: تضيف العلاقة 4 عدد 11 مرات؛ لذلك u12=3+11·4=47.

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

التدريب المتدرج

أجب من دون الرجوع إلى الحل. أظهر خطواتك في أسئلة الاستجابة القصيرة.

1. إذا كان u1=2 وu_(n+1)=3u_n-1، فأوجد u4. [1 درجات]

ب	29	أ	14
د	53	ج	41

الإجابة: 41

u2=5، ثم u3=14، ثم u4=41.

2. إذا كان a1=5 وa_(n+1)=a_n+4، فما الصورة الصريحة لـa_n؟ [1 درجات]

ب	a_n=5n+4	أ	a_n=4n+1
د	a_n=5+4n	ج	a_n=4n+5

الإجابة: a_n=4n+1

المتتابعة حسابية حدها الأول 5 وفرقها 4؛ لذلك a_n=5+4(n-1)=4n+1.

3. إذا كان a1=1 وa_(n+1)=2a_n+3، فما قيمة a4؟ [1 درجات]

ب	27	أ	21
د	32	ج	29

الإجابة: 29

النقطة الثابتة 3-؛ بوضع b_n=a_n+3 نحصل على b_(n+1)=2b_n وb1=4، ومنه a4=4×2^3-3=29.

4. لإثبات 1+3+5+...+(2n-1)=n^2 بالاستقراء ابتداء من n=1، ما خطوة الأساس الصحيحة؟ [1 درجات]

ب	1+3=2^2	أ	1=1^2
د	نفترض صحة العبارة عند n=1	ج	2n-1=n^2

الإجابة: 1=1^2

نعوض n=1 في الطرفين: الطرف الأيسر 1 والطرف الأيمن 1=1^2.

5. في برهان 1+2+...+n=n(n+1)/2، إذا افترضنا صحة P(k)، فأي تعبير ينتج بعد إضافة الحد k+1؟ [1 درجات]

ب	(k+1)^2/2	أ	k(k+1)/2
د	k(k+2)/2	ج	(k+1)(k+2)/2

الإجابة: (k+1)(k+2)/2

k+1. وهو الطرف المطلوب للحالة، k(k+1)/2+(k+1)=(k+1)(k+2)/2

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

6. لإثبات أن 5^n-1 يقبل القسمة على 4، أي إعادة كتابة تصلح لخطوة الانتقال؟ [1 درجات]

ب	5^(k+1)-1=5^k+4	أ	5^(k+1)-1=5(5^k-1)+4
د	5^(k+1)-1=5(5^k+1)	ج	5^(k+1)-1=4(5^k-1)

الإجابة: 5^(k+1)-1=5(5^k-1)+4

الحد 5(5^k-1) يقبل القسمة على 4 بفرض الاستقراء، و4 يقبل القسمة على 4.

7. صواب أم خطأ: إثبات خطوة الأساس وإثبات P(k)□P(k+1) يثبتان P(n) لكل عدد صحيح n من قيمة البداية فصاعدا1] . درجات]

□ صواب □ خطأ

الإجابة: صواب

خطوة الأساس تبدأ السلسلة، وخطوة الانتقال تنقل الصحة من كل حالة إلى التالية.

8. صواب أم خطأ: التحقق من أول 100 قيمة لعبارة ما يعد برهانا بالاستقراء لجميع الأعداد الطبيعية1] . درجات]

□ صواب □ خطأ

الإجابة: خطأ

فحص حالات منتهية لا يثبت الحالات اللانهائية؛ يلزم أساس وخطوة انتقال صحيحة.

9. إذا كان u1=1 وu2=3 وu_(n+2)=u_(n+1)+2u_n، فأوجد u6 مع عرض الحدود الوسيطة3] . درجات]

الإجابة: u6=43

u3=5، u4=11، u5=21، ثم u6=21+2×11=43.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

10. إذا كان a1=3 وa_(n+1)=a_n+2n، فاستنتج صورة صريحة لـa_n ثم أوجد a8. [3 درجات]

الإجابة: a_n=n^2-n+3، وa8=59

a_n=3+2Σ من k=1 إلى n-1؛ ومنه للمقدار k=3+n(n-1)=n^2-n+3 a8=64-8+3=59.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

11. أثبت بالاستقراء أن مجموع أول n عددا فرديا يساوي n^2 لكل n≥1. [3 درجات]

الإجابة: العبارة صحيحة لكل n≥1

الأساس n=1: 1=1^2. إذا كان المجموع حتى 2k-1 يساوي k^2، فبإضافة 2k+1 يصبح k^2+2k+1=(k+1)^2.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

12. أثبت بالاستقراء أن 7^n-1 يقبل القسمة على 6 لكل n≥1. [3 درجات]

الإجابة: 6 يقسم 7^n-1 لكل n≥1
الأساس: 7-1=6. وبفرض 7^k-1=6m، فإن 7^(k+1)-1=7(7^k-1)+6=6(7m+1)، فيقبل القسمة على 6.

التوزيع: طريقة صحيحة 1 | تعويض أو حساب صحيح 1 | نتيجة واضحة ومراجعة 1

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام

التحدي والمراجعة

1. حل العلاقة a1=1 وa_(n+1)=2a_n+3 بإزاحة مناسبة، واكتب a_n في صورة صريحة.

الثابتة 3- بوضع b_n=a_n+3 نحصل على b_(n+1)=2b_n وb1=4، إذن b_n=4×2^(n-1)، ومنه a_n=4×2^(n-1)-3. النقطة

2. أثبت بالاستقراء أن 2^n≥n+1 لكل n≥0.

الأساس n=0: 1≥1. إذا كان 2^k≥k+1، فإن 2^(k+1)=2×2^k≥2(k+1)≥k+2 لأن k≥0.

3. اكتشف الخطأ: في خطوة الانتقال افترض طالب صحة P(k+1) ثم أعاد ترتيبها حتى وصل إلى P(k+1). فسر لماذا البرهان دائري.

المسموح هو افتراض P(k) فقط، ثم اشتقاق P(k+1). افتراض النتيجة المطلوب إثباتها يجعل الحجة لا تقدم سببا مستقلا لصحتها.

خطة المتابعة

راجع البيانات الابتدائية والإزاحة وخطوتي الأساس والانتقال، ثم أعد الأسئلة 3-6 و9-12. إذا كانت 14 أو أكثر: انتقل إلى تحدي الوحدة الإلكتروني. إذا كانت الدرجة أقل من 14/20:

للاستخدام الشخصي أو الصفي - يمنع إعادة البيع أو النشر العام